PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 2 heures

Soit $a = \{a_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels et soit $b = \{b_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels **tous non nuls**.

Pour tout entier naturel non nul n, on considère la matrice

$$J_n^{a,b} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

On note $\Delta_n^{a,b}(X)$ son polynôme caractéristique : $\Delta_n^{a,b}(X) = \det(J_n^{a,b} - XI_n)$ où I_n désigne la matrice identité de taille n.

PRÉLIMINAIRES

Soit n un entier naturel non nul.

1. Montrer que $\Delta_n^{a,b}(X)$ a ses n racines réelles.

2. Exprimer $\Delta_{n+2}^{a,b}(X)$ en fonction de $\Delta_{n+1}^{a,b}(X)$ et $\Delta_n^{a,b}(X)$.

PARTIE A

Soit n un entier naturel non nul.

A.1. Exprimer $\cos(n+2)\theta$ en fonction de $\cos(n+1)\theta$, $\cos n\theta$ et $\cos\theta$, pour tout réel θ.

A.2. En déduire les racines de $\Delta_n^{a,b}(X)$ lorsque la suite a est identiquement nulle et la suite b est la suite constante égale à 1.

A.3. Soient x et y deux nombres réels. Déterminer les valeurs propres de la matrice $J_n^{a,b}$ lorsque la suite a est constante égale à x et la suite b est constante égale à y.

PARTIE B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\{\lambda_{i,n}\}_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ les n racines de $\Delta_n^{a,b}(X)$ rangées par ordre croissant, c'est-à-dire $\lambda_{0,n} \leqslant \lambda_{1,n} \leqslant \ldots \leqslant \lambda_{n-1,n}$.

B.1.*a.* Calculer $\Delta_1^{a,b}(X)$ et expliciter $\lambda_{0,1}$.

B.1.*b.* Calculer $\Delta_2^{a,b}(X)$ et expliciter $\lambda_{0,2}$ et $\lambda_{1,2}$.

B.1.*c.* Calculer $\Delta_2^{a,b}(\lambda_{0,1})$; en déduire que $\lambda_{0,2} < \lambda_{0,1} < \lambda_{1,2}$.

B.2. Montrer les inégalités :

$$\lambda_{i,n} < \lambda_{i,n-1} < \lambda_{i+1,n}, \forall\, i \in \{0, \ldots, n-2\}.$$

B.3. On suppose que $\lambda_{0,n}$ est strictement positif. Montrer que $\Delta_i^{a,b}(0) > 0$ pour tout entier i compris entre 1 et n.

B.4. Réciproquement, on suppose que $\Delta_i^{a,b}(0) > 0$ pour tout entier i compris entre 1 et n. Montrer que $\lambda_{0,n}$ est strictement positif.

PARTIE C

Dans cette partie, si M est une matrice, on désigne ${}^tM$ la matrice transposée de M.

Soit $\Theta = (\theta_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une famille de nombres réels telle que $\theta_{i,j} \neq 0$ si et seulement si $i \leqslant j \leqslant i+1$, pour tous entiers naturels i et j. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on considère la matrice $T_n^\Theta = (\theta_{i,j})_{(i,j) \in \{0,\ldots,n-1\} \times \{0,\ldots,n-1\}}$.

C.1.*a.* Montrer qu'il existe a une suite de nombres réels et b une suite de nombres réels tous non nuls telles que ${}^tT_n^\Theta T_n^\Theta = J_n^{a,b}$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

C.1.*b.* Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. Exprimer $\Delta_n^{a,b}(0)$ en fonction de $(\theta_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$. En déduire que $\Delta_n^{a,b}(0) > 0$.

C.2.*a.* Réciproquement, si les deux suites a et b sont telles que $\Delta_i^{a,b}(0) > 0$ pour tout entier i supérieur ou égal à 1, montrer qu'il existe $\Theta = (\theta_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ une famille de nombres réels vérifiant $\theta_{i,j} \neq 0$ si et seulement si $i \leqslant j \leqslant i+1$ pour tous entiers naturels i et j et telle que $J_n^{a,b} = {}^tT_n^\Theta T_n^\Theta$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.

C.2.*b.* A-t-on unicité de Θ dans la question précédente ?